PELABELAN - γ PADA *PATH* DAN *CYCLE*

oleh
Priyanto
M.0101012

SKRIPSI
ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan
memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SEBELAS MARET
SURAKARTA

2009

SKRIPSI

PELABELAN - γ PADA *PATH* DAN *CYCLE*

yang disusun oleh

PRIYANTO

M0101012

dibimbing oleh

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dra. Mania Roswitha, M.Si	Drs. Muslich, M.Si
NIP.195206281983032001	NIP.19521118197031001

Telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada hari Selasa, tanggal 28 Juli 2009

dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji	Tanda Tangan
1. Drs. Tri Atmojo K, M.Sc., Ph.D NIP. 196308261988031002	1. ....
2. Dra. Diari Indriati, M.Si NIP. 196101121988112001	2. ....
3. Winita Sulandari, M.Si NIP. 197808142005012002	3. ....

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,	Ketua Jurusan Matematika,
Prof. Drs. Sutarno, M.Sc., Ph.D	Drs. Kartiko, M.Si
NIP. 196008091986121001	NIP. 195007151986011001

ABSTRAK

Priyanto, 2009. <u>PELABELAN $-\gamma$ PADA *PATH* DAN *CYCLE*</u>, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Suatu graf menyatakan himpunan titik yang disebut *vertex* dan dihubungkan dengan garis disebut *edge.* Pelabelan $-\gamma$ dari graf G dengan *order* $|V(G)|$ dan *size* $|E(G)|$ adalah fungsi satu-satu $f : V(G) \rightarrow \{ 0, 1, 2, ..., |E(G)| \}$ yang menghasilkan pelabelan $f' : E(G) \rightarrow \{ 1, 2, ..., |E(G)| \}$ dari *edge* di G yang ditulis sebagai $f'(e) = | f(u) - f(v) |$ pada $e = uv$ di G. Nilai dari pelabelan $-\gamma$ f ditulis sebagai $val(f) = \sum_{e \in E(G)} f'(e)$. Nilai maksimal dari pelabelan $-\gamma$ pada G ditulis sebagai $val_{max}(G) = max\{ val(f) : f$ adalah pelabelan $-\gamma$ dari $G \}$. Sedangkan nilai minimal dari pelabelan $-\gamma$ pada G ditulis sebagai $val_{min}(G) = min\{ val(f) : f$ adalah pelabelan $-\gamma$ dari $G \}$.

Tujuan dari penulisan ini adalah dapat mendeskripsikan pelabelan $-\gamma$ pada *path* dan *cycle* kemudian menghasilkan nilai maksimal dan nilai minimalnya. Metode yang digunakan pada skripsi ini adalah studi literatur.

Selanjutnya dapat ditarik kesimpulan bahwa

1. $val_{min}(P_n) = n - 1$ dan $val_{max}(P_n) = \left\lfloor \frac{n^2 - 2}{2} \right\rfloor$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$.
2. $val_{min}(C_n) = 2(n - 1)$, $val_{max}(C_n) = \frac{(n-1)(n+3)}{2}$ untuk setiap bilangan bulat ganjil $n \geq 3$ dan $val_{max}(C_n) = \frac{n(n+2)}{2}$ untuk setiap bilangan bulat genap $n \geq 4$.

ABSTRACT

Priyanto, 2009. $\gamma-$ **<u>LABELING of *PATH* AND *CYCLE*</u>, Faculty of Mathematic and Natural Science, Sebelas Maret University.**

A graph explained set of points called vertices and together with lines called edge. A $\gamma-$ labeling of a graph G of order $|V(G)|$ and size $|E(G)|$ is a one-to-one function, $f : V(G) \rightarrow \{ 0, 1, 2, ..., |E(G)| \}$ that induces a labeling $f' : E(G) \rightarrow \{ 1, 2, ..., |E(G)| \}$ of the edges of G, $f'(e) = | f(u) - f(v)$ for edge $e = uv$ of G. Value of $\gamma-$ labeling f denoted by $val(f) = \sum_{e \in E(G)} f'(e)$. The maximum value of $\gamma-$ labeling of G is defined by $val_{max}(G) = max\{val(f) : f$ is a $\gamma-$ labeling of $G\}$. And the minimum value of $\gamma-$ labeling of G is defined by $val_{min}(G) = min \{val(f) : f$ is a $\gamma-$ labeling of $G\}$.

The aims of research are to describe $\gamma-$ labeling of path and cycle and resulting of the maximum and minimum values. The method on this research is a literary study.

The result shows that

1. $val_{min}(P_n) = n - 1$, $val_{max}(P_n) = \left\lfloor \frac{n^2 - 2}{2} \right\rfloor$ for every integer $n \geq 2$

2. $val_{min}(C_n) = 2(n - 1)$, $val_{max}(C_n) = \frac{(n-1)(n+3)}{2}$ for every odd integer $n \geq 3$ and $val_{max}(C_n) = \frac{n(n+2)}{2}$ for every even integer $n \geq 4$.

MOTO

"… Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kamu dan orang-orang yang diberi pengetahuan beberapa derajat"

(QS. Al Mujaadalah : 11)

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

(QS. Al Insyirah : 6)

PERSEMBAHAN

Karya sederhana ini aku persembahkan kepada :

Bapak, Ibu (almarhumah), Mbah Putri dan Kakakku atas semua doa, kasih sayang, tetes keringat dan pengorbanan yang tiada henti atas diriku.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa selesainya skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, petunjuk, saran, dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Dra. Mania Roswitha, M.Si sebagai Dosen Pembimbing Akademis dan juga selaku Dosen Pembimbing I yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, nasehat dan pengarahan dalam penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Drs. Muslich, M.Si sebagai Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bantuan dan pengarahan serta perhatian dalam penulisan skripsi ini.
3. Teman-teman angkatan 2001 atas bantuan, semangat, serta dukungan untuk menyelesaikan skripsi ini.

Penulis berharap tulisan ini dapat menambah wawasan mahasiswa FMIPA UNS, terutama tentang teori graf.

Surakarta, Juli 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

NOTASI

G	:	Nama suatu graf
U,V	:	Himpunan *vertex*
E	:	Himpunan *edge*
e	:	Nama *edge* suatu graf
u,v	:	Nama *vertex* suatu graf
γ, γ_+	:	Nama suatu pelabelan
P_n	:	*Path* dengan *order n*
C_n	:	*Cycle* dengan *order n*
deg	:	*Degree*
$f\|_V$	:	Fungsi yang dibatasi pada V
Z^+	:	Himpunan bilangan bulat positif
φ	:	Pemetaan satu-satu pada graf *isomorfis*
$\cong$	:	*Isomorfisme*
$\square$	:	Bukti selesai

BAB I

PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan dan manfaat penulisan skripsi.

1.1 Latar Belakang Masalah

Manusia adalah makhluk sosial yang tidak bisa hidup sendiri tanpa bantuan orang lain. Dalam menjalankan kehidupannya manusia akan saling berhubungan dengan sesamanya. Hubungan-hubungan pada manusia tersebut dapat membentuk suatu jaringan. Jaringan yang terbentuk akibat hubungan manusia saat ini besar sekali, karena seluruh manusia yang ada di muka bumi ini akan terjalin dalam jaringan itu.

Misalkan hubungan dua manusia digambarkan dengan titik dan garis. Kedua manusia dimisalkan dengan titik yang dihubungkan dengan garis. Dua titik itu adalah *vertex* dan garis yang menghubungkannya adalah *edge*. Jaringan itu dapat digambarkan dalam bentuk graf.

Suatu graf menyatakan himpunan titik yang disebut *vertex* dan dihubungkan dengan garis yang disebut *edge.* Oleh karena itu graf dapat digunakan untuk menyatakan jaringan komplex yang terdiri dari komponen-komponen yang berhubungan. Contoh sederhana dari graf adalah peta jalan raya. Kota-kota dalam peta tersebut digambarkan sebagai *vertex* dan jalan yang menghubungkan kota-kota adalah *edge* (Chartrand dan Ollermann, 1993).

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang telah banyak memberi peran dalam pengembangan matematika terapan dan mengalami perkembangan sangat cepat sejak tahun 1920-an. Tidak diragukan lagi, alasan ketertarikan terhadap teori graf adalah aplikasinya dalam berbagai bidang antara lain : Ilmu Komputer, Kimia, Riset Operasi, dan Ekonomi. Sebagai contoh, teori graf memberikan solusi dalam masalah penentuan rute terpendek dengan menggunakan pelabelan yang merupakan salah satu pokok bahasan dalam teori graf (Wijaya, 2004).

Pelabelan (*labeling* / *valuation*) pada graf menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti dalam masalah teori koding, kristalografi, sinar-x, radar, sistem alamat jaringan komunikasi dan desain sirkuit. Pelabelan dari suatu graf $G(V,E)$ adalah pemetaan satu-satu yang membawa elemen graf berupa himpunan *vertex V(G)* atau himpunan *edge E(G)* sebagai *domain* ke bilangan-bilangan bulat positif sebagai *kodomain*, yang disebut label. Jika domain yang digunakan adalah himpunan semua *edge* dan himpunan semua *vertex* maka disebut sebagai pelabelan total (*total labeling*). Pelabelan yang menggunakan *domain* himpunan semua *edge* atau himpunan semua *vertex* saja masing-masing disebut sebagai pelabelan *edge* (*edge-labeling*) dan pelabelan *vertex* (*vertex-labeling*) (Wallis, 2001).

Salah satu contoh pelabelan adalah pelabelan ajaib (*magic labeling*) yang diperkenalkan oleh Wallis (2001). Pada perkembangan selanjutnya, Chartrad, et al. (2005) menulis tentang $\text{pelabelan}-\gamma$ (γ- labeling). $\text{Pelabelan}-\gamma$ pada graf *G* adalah fungsi satu-satu *f : V(G)* $\rightarrow$ { 0, 1, 2,…, |*E*(*G*)| } yang menghasilkan *f' : E(G)* $\rightarrow$ { 1,2,…, |*E*(*G*)| } dari *edge* di *G* yang ditulis sebagai *f'(e)* = | *f(u)* - *f(v)*| untuk semua *edge e* = *uv* dari *G*. $\text{Pelabelan}-\gamma$ dari graf *G* menghasilkan nilai *val(f)* yang ditulis sebagai *val*(*f*) = $\sum_{e \in E(G)} f'(e)$. Nilai maximum dari $\text{pelabelan}-\gamma$ graf *G*, val_{max}(G) = *max* { *val*(*f*) : *f* adalah $\text{pelabelan}-\gamma$ dari *G*}. Sedangkan nilai minimum dari $\text{pelabelan}-\gamma$ pada graf G, val_{min}(G) = *min* { *val*(*f*) : *f* adalah $\text{pelabelan}-\gamma$ dari *G*}. Tujuan penulisan skripsi ini adalah mengkaji kembali secara teoritis mengenai $\text{pelabelan}-\gamma$ pada *path* dan *cycle* (Chartrand, *et al.*, 2005).

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan pada latar belakang masalah di atas, masalah yang dikaji dalam penulisan skripsi ini adalah

1.5.1.1 bagaimanakah cara mendeskripsikan $\text{pelabelan}-\gamma$ pada *path* ?

1.5.1.2 bagaimanakah cara mendeskripsikan $\text{pelabelan}-\gamma$ pada *cycle*?

1.5.1.3 bagaimanakah mensimulasikan $\text{pelabelan}-\gamma$ pada *path* dan *cycle* menggunakan program komputer?

1.3 Batasan Masalah

Penulisan skripsi ini membahas mengenai $\text{pelabelan} - \gamma$ pada *path* dan *cycle* yang dibatasi pada kajian teoritis, graf berhingga, graf sederhana dan graf tak berarah. Simulasi program menggunakan bahasa Pascal.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan yang dicapai dari penulisan tugas akhir ini adalah

1. dapat mendeskripsikan $\text{pelabelan} - \gamma$ pada *path*
2. dapat mendeskripsikan $\text{pelabelan} - \gamma$ pada *cycle*
3. dapat menyusun program komputer untuk simulasi $\text{pelabelan} - \gamma$ pada *path* dan *cycle.*

a. Manfaat

Manfaat yang ingin diperoleh dari penulisan tugas akhir ini adalah

1. dapat memberikan wawasan kepada pembaca khususnya yang berminat dengan teori graf khususnya tentang $\text{pelabelan} - \gamma$
2. dapat mengetahui nilai minimal dan nilai maksimal dari $\text{pelabelan} - \gamma$ pada *path* dan *cycle*.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Tinjauan Pustaka

Untuk menyelesaikan masalah dengan baik diperlukan suatu pengetahuan yang cukup. Di bawah ini diuraikan beberapa hal yang mendasari penulisan skripsi ini untuk mencapai tujuan penulisan. Di sini akan diuraikan beberapa definisi dalam teori graf dan konsep dasar $\text{pelabelan} - \gamma$.

ii.Teori Graf

Definisi 2.1 [Bondy dan Murty, 1976]

Suatu graf G(V,E) merupakan himpunan V(G) dan E(G), dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_v\}$ *merupakan vertex berhingga yang tidak kosong dan* $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_\varepsilon\}$ *merupakan himpunan pasangan tak berurutan dari anggota-anggota V(G), yang disebut edge. E(G) bisa bernilai kosong. Setiap pasang vertex* (v_i, v_j) *dihubungkan oleh edge e.*

Berikut ini diberikan suatu graf *G* dengan 4 *vertex* dan 4 *edge*.

v_1 v_4

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

e_1 e_2 e_4

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

v_2 e_3 v_3

Gambar 2.1 Graf *G*

Definisi 2.2 [Harsfield dan Ringel, 1990]

Graf tak berarah (undirected graph) adalah graf yang edge-nya tak mempunyai arah. Jika terdapat edge e yang terhubung dengan pasangan tak berurutan vertex v_1 *dan vertex* v_j*, maka ditulis sebagai* $v_i\, v_j$ *atau* $v_j\, v_i$*.*

Definisi 2.3 [Harsfield dan Ringel, 1990]

Graf berarah (directed graph) adalah graf yang edgenya mempunyai arah. Edge e yang terhubung dengan pasangan berurutan vertex v_i *dan* v_j*, ditulis sebagai* $v_i v_j$ *yang melambangkan sebuah edge dari* v_i *ke* v_j*. Arah edge biasanya ditunjukkan dengan panah.*

Gambar 2.2.a merupakan contoh graf tak berarah dan Gambar 2.2.b merupakan contoh graf berarah, masing-masing graf memiliki 4 *vertex* dan 4 *edge*.

v_1 e_1 v_2 v_1 v_2

e_4 e_2

v_3 e_3 v_4 v_3 v_4

Gambar 2.2.a Graf Tak Berarah Gambar 2.2.b Graf Berarah

Definisi 2.4 [Johnsonbaugh, 2001]

Sebuah edge e dalam sebuah graf G (berarah atau tidak berarah) yang terhubung dengan pasangan vertex v_i *dan vetex* v_j *disebut berhubungan (incident) terhadap* v_i *dan* v_j *atau sebaliknya sedangkan* v_i *dan* v_j *merupakan vertex-vertex yang berdekatan (adjacent) yang dinotasikan dengan* $v_i \sim v_j$*.*

Pada Gambar 2.2.a *edge* e_1 berhubungan dengan *vertex* v_1 dan v_2 sedangkan *vertex* v_2 berdekatan dengan v_1 dan v_4.

Definisi 2.5 [Johnsonbaugh, 2001]

Dua edge atau lebih yang terhubung terhadap pasangan vertex yang sama disebut edge sejajar (parallel edge). Sebuah edge yang berhubungan terhadap satu vertex disebut loop. Sebuah vertex yang tidak berhubungan terhadap sembarang edge disebut isolated vertex.

Gambar 2.3.a merupakan contoh graf dengan *edge sejajar* dan Gambar 2.3.b merupakan contoh graf dengan *loop* dan *isolated vertex*.

v_2

v_3 v_3

v_1 v_4

v_1 v_2

Gambar 2.3.a Graf dengan *Edge Sejajar*

Gambar 2.3.b Graf dengan *Loop* dan *Isolated Vertex*

Definisi 2.6 [Johnsonbaugh, 2001]

Graf dikatakan sebagai graf sederhana (simple graph) jika tidak terdapat loop dan edge sejajar.

Berikut diberikan contoh graf sederhana dengan 6 *vertex* dan 7 *edge*.

v_6 v_5

v_3

v_1

v_2 v_4

Gambar 2.4 Graf Sederhana

Definisi 2.7 [Bondy dan Murty, 1976]

Graf G dikatakan berhingga jika V(G) dan E(G) merupakan himpunan berhingga.

Definisi 2.8 [Bondy dan Murty, 1976]

Walk merupakan suatu deret bergantian vertex dan edge $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{v-1}, e_v, v_v$ *dengan awal dan akhirnya berupa vertex. Trail adalah walk yang semua edge-nya berbeda (tidak boleh diulang), tetapi vertex-nya boleh diulang. Path adalah walk yang semua vertex-nya berbeda.*

Contoh graf yang memuat *walk, trail dan path* tampak pada Gambar 2.5

v_2 e_2 v_3

e_1

v_1 e_6 e_7 e_8 e_3

e_5

v_5 e_4 v_4

Gambar 2.5 Graf yang memuat *Walk*, *Trail*, *Path*

Salah satu contoh *walk, trail dan path* yang termuat dalam Gambar 2.5 adalah sebagai berikut

walk : $v_1, e_2, v_2, e_6, v_5, e_5, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_8, v_5, e_4, v_4$

trail : $v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_8, v_3, e_2, v_2, e_6, v_5$

path : $v_4, e_3, v_3, e_8, v_5, e_5, v_1, e_1, v_2$.

Definisi 2.9 [Bondy dan Murty, 1976]

Graf G dikatakan graf terhubung (connected graph) jika terdapat suatu path di antara sebarang dua vertex dari graf G. Jika tidak demikian, maka disebut graf tak terhubung (disconnected graph).

Contoh graf terhubung dan graf tak terhubung dapat dilihat pada Gambar 2.6.a dan Gambar 2.6.b.

v_3 v_2

v_2 v_1 v_7 v_4

v_1

v_5 v_6 v_1 v_3

Gambar 2.6.a Graf Terhubung Gambar 2.6.b Graf Tak Terhubung

Definisi 2.10 [Bondy dan Murty, 1976]

Banyaknya vertex dalam graf G dinamakan order yang dinotasikan dengan n dan banyaknya edge dalam suatu graf dinamakan size yang dinotasikan dengan m.

Contoh graf dengan *order* 5 dan *size* 6 ditunjukan pada Gambar 2.7.

e_6 v_1 e_1

v_5 v_2 *Order G* adalah $n = |V(G)| = 5$

e_5 e_3 e_2 *Size G* adalah $m = |E(G)| = 6$

v_4 e_4

v_3

Gambar 2.7 *Order* dan *Size* dari Graf *G*

Definisi 2.11 [Bondy dan Murty, 1976]

Cycle adalah path dengan setiap vertex yang dilewati tidak boleh sama kecuali vertex awal dan vertex akhir.

Contoh *cycle* dengan 3 *vertex* ditunjukkan pada Gambar 2.8.

v_1

v_2 v_3

Gambar 2.8 *Cycle*

Definisi 2.12 [Bondy dan Murty, 1976]

Cycle dengan panjang n dinotasikan dengan n-cycle atau C_n*. Jika n adalah bilangan ganjil maka* C_n *disebut sebagai cycle ganjil dan jika n genap maka* C_n *disebut sebagai cycle genap.*

Gambar 2.9.a dan Gambar 2.9.b adalah contoh *cycle* ganjil dan *cycle* genap.

v_1 v_1 v_2

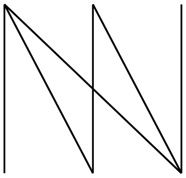
v_2 v_3 v_4 v_3

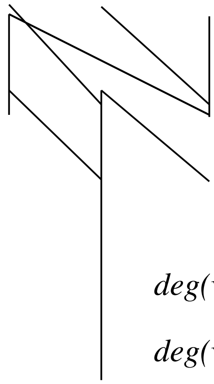
Gambar 2.9.a *Cycle* Ganjil Gambar 2.9.b *Cycle* Genap

Definisi 2.13 [Bondy dan Murty, 1976]

Degree suatu vertex v dalam graf G adalah banyaknya edge yang berhubungan dengannya dan dinotasikan dengan deg(v).

Gambar 2.10 adalah contoh graf dengan *degree* masing-masing *vertex*-nya.





$deg(v_1) = 3$ $deg(v_2) = 2$

$deg(v_3) = 3$ $deg(v_4) = 2$

$deg(v_5) = 2$ $deg(v_6) = 0$

Gambar 2.10 Graf Beserta *Degree* dari *Vertex*

Definisi 2.14 [Wallis, 2001]

Isomorfisme dari graf G terhadap Hadalah pemetaan satu-satu φ *dari V(G) pada V(H) dengan sifat bahwa* v_1, v_2 *adalah vertex yang berhubungan dalam G jika dan hanya jika* $\varphi(v_1)$ *dan* $\varphi(v_2)$ *adalah vertex yang berhubungan dalam H.*

Gambar 2.11 adalah bentuk *isomorfisme G* pada *H* atau dapat ditulis dengan $G \cong H$.

u_4

v_1 v_2 v_3

u_1 u_3

G H

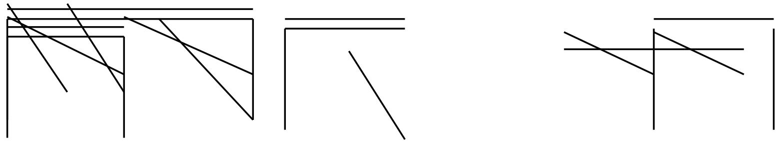
u_6 u_5

v_6 v_5 v_4

u_2

$G \cong H$ karena $\varphi(v_i) = u_i$, $i = 1, 2, ..., 6$.

Gambar 2.11 *G Isomorfis* dengan *H*



Definisi 2.15 [Harsfield dan Ringel, 1990]

Graf H disebut subgraf dari graf G jika setiap vertex H adalah vertex dari G dan setiap edge H adalah edge dari G, dengan kata lain V(H) $\subseteq$ *V(G) dan E(H)* $\subseteq$ *E(G).*

Berikut ini diberikan contoh graf *G* dengan *subgraf* H_1 dan H_2.

G H_1 H_2

Gambar 2.12 H_1 dan H_2 *Subgraf* dari *G*

Definisi 2.16 [Wallis, 2001]

Subgraf H dari graf G dinamakan spanning subgraf jika V(G) = V(H).

Berikut diberikan contoh *spanning subgraf H* dari graf *G.*

G v_1 H v_1

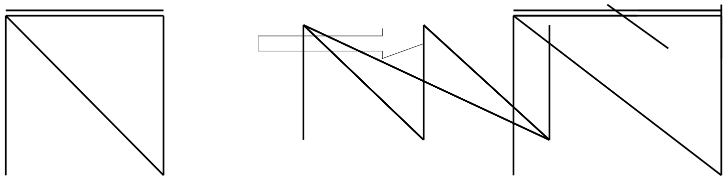
v_2 v_6 v_2 v_6

v_3 v_4 v_5 v_3 v_4 v_5

Gambar 2.13 *Spanning Subgraf H* dari Graf *G*

Definisi 2.17 [Chartrand dan Oellerman, 1993]

Suatu graf yang setiap vertexnya mempunyai degree sama yaitu r, disebut graf r-regular bipartite.



Berikut diberikan contoh *3-regular bipartite graf.*

Gambar 2.14 *3-regular bipartite graf*

Definisi 2.18 [Aldous dan Wilson]

Suatu graf yang dibentuk dengan cara menambahkan vertex dengan degree 2 disebut subdivisi.

Gambar 2.15 adalah contoh subdivisi dari graf *G*

G

Gambar 2.15 Subdivisi dari Graf *G*

iii.**Pelabelan dan Pelabelan** - γ

Pada prinsipnya pelabelan graf merupakan pemberian nilai (label) pada *vertex, edge,* kedua *vertex* dan *edge* ataupun pada bidang.

Definisi 2.19 [Wallis,2001]

Pelabelan dari sebuah graf adalah pemetaan elemen-elemen graf ke bilangan-bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau non negatif).

$1v_1$ 8 $2v_2$

7

$5v_5$ 3 10 6

2

$4v_4$ 8 $3v_3$

Gambar 2.16 Pelabelan Graf

Definisi 2.20 [Chartrand, *et.al.*, 2005]

Jika diberikan graf G dengan order n dan size m maka pelabelan - γ *dari G adalah fungsi satu-satu f : V(G)* $\rightarrow$ *{ 0, 1, 2, …, m } yang menghasilkan f' : E(G)* $\rightarrow$ *{ 1, 2, …, n } dari edge di G ditulis sebagai f'(e) = | f (u) - f (v) | untuk semua edge e = uv dari G. Pada pelabelan -* γ *dari graf G menghasilkan nilai val(f) yang ditulis sebagai*

$$val(f) = \sum_{e \in E(G)} f'(e).$$

Contoh Beberapa Pelabelan $-\gamma$ dari P_5 ditunjukkan Gambar 2.17.

f_1 : 0 1 2 3 4

1 1 1 1

$val(f_1) = 4$

f_2 : 0 1 2 4 3

1 1 2 1

$val(f_2) = 5$

f_3 : 2 3 4 1 0

1 1 3 1

$val(f_3) = 6$

f_4 : 3 2 0 1 4

1 2 1 3

$val(f_4) = 7$

Gambar 2.17 Beberapa Pelabelan $-\gamma$ dari P_5

Nilai maksimal dari $\text{pelabelan} - \gamma$ graf G didefinisikan sebagai

$$val_{max}(G) = max\{val(f) : f \text{ adalah } \text{pelabelan} - \gamma \text{ dari } G\}.$$

Sedangkan nilai minimal dari $\text{pelabelan} - \gamma$ pada graf G didefinisikan sebagai :

$$val_{min}(\mathrm{G}) = min\{val(f) : f \text{ adalah } \text{pelabelan} - \gamma \text{ dari } G\}.$$

$\text{Pelabelan} - \gamma$ g pada graf G adalah $\text{pelabelan max} - \gamma$ ($\gamma -$ *max labeling*) jika $val(g) = val_{max}(G)$ dan $\text{pelabelan} - \gamma$ h adalah $\text{pelabelan min} - \gamma$ ($\gamma -$ *min labeling*) jika $val(h) = val_{min}(G)$. *Span*(f) dari $\text{pelabelan} - \gamma$ f pada graf G didefinisikan sebagai

$$span(f) = max\{f(v) : V \in V(G)\} - min\{f(v) : v \in V(G)\}.$$

b. Kerangka Pemikiran

Suatu graf menyatakan himpunan titik yang disebut *vertex* dan dihubungkan dengan garis yang disebut *edge*. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang telah banyak memberi peran dalam pengembangan matematika terapan dan mengalami perkembangan sangat cepat sejak tahun 1920-an. Pelabelan merupakan salah satu pokok bahasan dalam teori graf. Pada perkembangan selanjutnya, Chartrad, et al. (2005) menulis tentang $\text{pelabelan} - \gamma$. Skripsi ini mengkaji ulang mengenai $\text{pelabelan} - \gamma$ pada suatu graf G yang diperkenalkan oleh Chartrand, et al. (2005). Penulisan skripsi ini membahas mengenai $\text{pelabelan} - \gamma$ pada *path* dan *cycle* yang dibatasi pada kajian teoritis, graf berhingga, graf sederhana dan graf tak berarah. Nilai val_{max} dan val_{min} pada $\text{pelabelan} - \gamma$ dapat diperoleh dengan cara membuktikan proposisi dan teorema-teorema dengan terlebih dahulu mempelajari definisi-definisi yang ada. Setelah itu dibuat program komputer dengan menggunakan bahasa Pascal.

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah studi literatur, yaitu metode penulisan dengan bahan diambil dari buku referensi, jurnal dan artikel. Definisi-definisi dan teorema-teorema dalam referensi dikaji ulang, kemudian digunakan dalam pembahasan perumusan masalah yang telah dirumuskan.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut

4. mempelajari buku-buku, jurnal-jurnal dan artikel-artikel referensi
5. mengkaji definisi-definisi dan teorema-teorema
6. menguraikan proses $\text{pelabelan} - \gamma$ pada suatu *path* dan cycle
7. menghitung *val(f)* dari $\text{pelabelan} - \gamma$ suatu *path* dan *cycle*
8. membuktikan teorema-teorema dan lemma-lemma
9. menentukan val_{max} dan val_{min} dari *path* dan *cycle*
10. membuat program komputer dengan bahasa Pascal
11. menarik kesimpulan.

BAB IV

PEMBAHASAN

Bab ini membahas $\text{pelabelan}-\gamma$ pada *path* dan *cycle*. Nilai val_{max} dan val_{min} dideskripsikan dari pengamatan, proposisi dan teorema-teorema yang diperkenalkan oleh Chartrand, et al. (2005). Sebelum pembahasan mengenai $\text{pelabelan}-\gamma$ pada *path* dan *cycle,* terlebih dahulu dibahas mengenai $\text{pelabelan}-\gamma$ pada subgraf.

4.1 Pelabelan $-\gamma$ pada Subgraf

Bagian ini membahas hubungan antara nilai maksimal dan nilai minimal dari graf terhubung dan subgraf terhubung. Pada graf G, dimisalkan $m(G)$ sebagai *size* dari G.

Proposisi 4.1.1

Jika H adalah subgraf terhubung dari graf terhubung G, maka

$$val_{min}(H) < val_{min}(G) \text{ dan } val_{max}(H) < val_{max}(G)$$

Bukti

Jika dimisalkan G memiliki *order* n dan f adalah $\text{pelabelan min}-\gamma$ dari $G,$ maka $f(V(H)) = \{ a_1, a_2, ..., a_k \}$, dengan $k \leq n$ dan $a_1 < a_2 < ... < a_k$. Selanjutnya akan dipertimbangkan bahwa fungsi $g : \{ a_1, a_2, ..., a_k \} \rightarrow \{ 0, 1, ..., k-1 \}$didefinisikan sebagai $g(a_i) = i-1$. Sebagai akibatnya, $g \circ (f|_{V(H)}) : V(H) \rightarrow \{ 0, 1, ..., m(H) \}$ adalah $\text{pelabelan}-\gamma$ dari H dan $val\ (g \circ (f|_{V(H)})) \leq val\ (f|_{V(H)})$. Karena H adalah subgraf dari $G,$ maka terdapat $e \in E(G) - E(H),$ sehingga $val_{min}(H) \leq val(f|_H) \leq val(f) - f'(e) = val_{min}(G) - f'(e),$ dengan $val(f) = val_{min}(G)$ berakibat $val_{min}(H) < val_{min}(G).$

Selanjutnya dimisalkan bahwa f sebagai $\text{pelabelan max}-\gamma$ dari H. Jika H adalah *spanning* *subgraf* dari G, maka pasti nilai f di H lebih kecil dari pada $val_{max}(G)$, sehingga $val_{max}(H) < val_{max}(G)$. Selanjutnyat diasumsikan bahwa H bukan *spanning subgraf* dari G. Jika H' adalah subgraf terhubung dari G yang dihasilkan dari $V(H)$, maka nilai f kurang dari atau sama dengan nilai f pada H (dan jika $H \neq H'$, maka nilai f pada H' melampaui nilai f pada H). Selanjutnya diasumsikan, bahwa H adalah subgraf yang dihasilkan dari G. Karena H dan G keduanya terhubung, maka terdapat barisan H_0, H_1, ..., H_t dari yang dihasilkan subgraf terhubung dari G dengan $H_0 = H$ dan $H_t = G$ sedemikian sehingga terdapat bilangan bulat i dengan $1 \leq i \leq t$, $|V(H_i)| = |V(H)| + i$ dan $H_{i-1} \subset H_i$. Misalkan $f_0 = f$, dan terdapat bilangan bulat i dengan $1 \leq i \leq t$,didefinisikan f_i menjadi f_{i-1} yang dibatasi pada $V(H_{i-1})$, dan $f_i(x) = m(H_i)$ pada *vertex* $x \in V(H_i) - V(H_{i-1})$. Sehingga terdapat i dengan $1 \leq i \leq t$, fungsi f_i adalah $\text{pelabelan}-\gamma$ dan $val(f_{i-1}) < val(f_i)$ sehingga berakibat bahwa $val_{max}(H) < val_{max}(G)$.

$\square$

Lemma 4.1.2

Jika G adalah graf terhubung dengan order n dan $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$ adalah fungsi satu-satu, maka terdapat $pelabelan-\gamma$ g pada G dengan val(g) ≤ val(f). Selanjutnya, jika span(f) ≥ n, maka terdapat $pelabelan-\gamma$ g dengan val(g) < val(f).

Bukti

Misalkan $V(G) = \{ v_1, v_2, ..., v_n \}$ dan $f(v_i) = a_i$, untuk $a_1 < a_2 < ... < a_n$, fungsi $h : \{ a_1, a_2, ..., a_n \} \rightarrow \{ 0, 1, ..., n-1 \}$ didefinisikan sebagai $h(a_i) = i - 1$ pada $1 \leq i \leq n$. Dengan demikian $g = h \circ f$ adalah $\text{pelabelan}-\gamma$ pada G. Selanjutnya untuk setiap *edge e* pada G, dapat diperoleh $g'(e) \leq f'(e)$ sehingga $val(g) \leq val(f)$. Selanjutnya dimisalkan bahwa $span(f) \geq n$. Karena $span(f) = n - 1$ jika dan hanya jika $a_{i+1} - a_i = 1$ untuk setiap bilangan bulat i dengan $1 \leq i \leq n-1$, maka terdapat bilangan bulat j dengan $a_{j+1} - a_j \geq 2$. Karena G terhubung, maka terdapat *edge e* yang menghubungkan *vertex x* dan *y, dengan* $x \in \{ v_1, v_2, ..., v_j \}$ dan $y \in \{ v_{j+1}, v_{j+2}, ..., v_n \}$. Oleh karena itu $f(x) = a_{j-\delta_x}$ dan $f(y) = a_{j+1+\delta_y}$, dengan δ_x, $\delta_y \geq 0$ sehingga

$$f'(e) = a_{j+1+\delta_y} - a_{j-\delta_x} \geq (j + 1 + \delta_y) - (j - \delta_x) + 1$$

$> 1 + \delta_x + \delta_y = g'(e).$ □

Lemma 4.1.2 memberikan Akibat 4.1.3 dan Proposisi 4.1.4.

Akibat 4.1.3

Jika G graf terhubung dengan order n, maka G memiliki pelabelan min $-\gamma$ dengan vertex-vertexnya diberi label 0, 1, ...,n – 1.

Proposisi 4.1.4

Jika H adalah sub divisi dari graf terhubung G, maka

$$val_{min}(G) < val_{min}(H) \quad dan \quad val_{max}(G) < val_{max}(H)$$

Bukti

Hal ini cukup dibahas pada kasus *H* yang memuat *edge* tunggal pada *G* yang menjadi subdivisi. Misalkan *uv* *edge* pada *G* adalah bagian dari subdivisi *H,* sehingga terdapat *edge uw* dan *vw* pada *H.* Selanjutnya dibuktikan pertidaksamaan pertama. Jika *f* adalah pelabelan min $-\gamma$, maka berakibat $f\,|_{V(G)}$ sedemikian sehingga $f\,|_{V(G)}\,(uv) \leq f'(uv) + f'(vw)$ pada graf *G.* Sehingga dari Lemma 4.1.2 dihasilkan *val*(*G*) < *val*(*H*). Oleh karena itu dihasilkan $val_{min}(G) \leq val(G) < val_{min}(H) \leq val(H)$. Selanjutnya dimisalkan bahwa *f* sebagai pelabelan max $-\gamma$ dari graf *G,* sehingga dapat diturunkan pelabelan $-\gamma$ *g* dari *H* yang didefinisikan sebagai berikut

$$g(x) = \begin{cases} m(H) & , jika\ x = w \\ f(x) & , jika\ x \neq w \end{cases}$$

Dari uraian di atas dihasilkan $val(G) \leq val_{max}(G) < val(H) \leq val_{max}(H)$. □

4.2 Pelabelan $-\gamma$ pada *Path*

Sebuah *path* dengan *order n* ditulis sebagai $P_{n.}$ $\text{Pelabelan}-\gamma$ f dari *path* yang ditulis sebagai $P_n : v_1, v_2, \ldots, v_n$ didefinisikan sebagai $f(v_i) = i - 1$ sehingga $val(f) = n - 1$. Karena f adalah fungsi satu-satu dari $V(P_n)$ ke $\{ 0, 1, 2, \ldots, m \}$, maka dapat diturunkan bahwa $f'(e) \geq 1$ untuk setiap *edge* di P_n sehingga

$$val(f) \geq m. \qquad (4.1)$$

4.2.1 Mencari $val_{min}(P_n)$

Berdasarkan persamaan (4.1) dapat ditunjukkan Pengamatan 4.2.1.

Pengamatan 4.2.1

Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, *berlaku* $val_{min}(P_n) = n$-1.

Bukti

Karena $f(v_i) = i - 1$ maka $val(f) = \sum_{e \in E(G)} f'(e) = n - 1$.Oleh karena itu $val_{min}(P_n) \leq n - 1$. Selanjutnya persamaan (4.1) menyatakan bahwa $val(f) \geq m$ oleh karena itu dapat diturunkan bahwa $val(f) \geq n - 1$, sehingga $val_{min}(P_n) \geq n - 1$.

□

4.2.2 Mencari $val_{max}(P_n)$

Untuk menentukan $val_{max}(P_n)$ langkah pertama adalah dimisalkan bahwa $n = 2k + 1 \geq 3$ ganjil. $\text{Pelabelan}-\gamma$ pada P_n didefinisikan sebagai

$$f(v_i) = \begin{cases} k + \dfrac{i+1}{2} & , \textit{jika i adalah ganjil dan } i < 2k+1 \\ k & , \textit{jika } i = 2k+1 \\ \dfrac{i-2}{2} & , \textit{jika i adalah genap.} \end{cases}$$

(4.2)

Dari persamaan (4.2) dapat ditunjukkan bahwa k *edge* dari P_n diberi label $k + 1$, satu *edge* diberi label 1 dan yang lainnya $k - 1$ *edge* diberi label $k + 2$ sehingga

$$\begin{aligned} val(f) &= k(k+1) + 1 + (k-1)(k+2) \\ &= k^2 + k + 1 + k^2 + k - 2 \\ &= 2k^2 + 2k - 1 \\ &= 2k(k+1) - 1 \\ &= 2\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) - 1 \\ &= \left(\frac{n^2-1}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{n^2-3}{2}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Sebagai contoh diberikan $n = 7$, maka salah satu pelabelan $-\gamma$ pada P_7 adalah sebagai berikut

$f(v_1) = 4$

$f(v_2) = 0$

$f(v_3) = 5$

$f(v_4) = 1$

$f(v_5) = 6$

$f(v_6) = 2$

$f(v_7) = 3.$

Sebagai ilustrasi, pelabelan $-\gamma$ f dari P_7 ditunjukkan pada Gambar 4.1 di bawah ini.

$$g(v_i) = \begin{cases} \cancel{k + \frac{i-1}{2} \quad , jika\ i\ adalah\ ganjil} \\ \frac{i-2}{2} \quad , jika\ i\ adalah\ genap. \end{cases}$$

f: 4 0 5 1 6 2 3

4 5 4 5 4 1

$val(f) = 23$

Gambar 4.1 Salah Satu Pelabelan $-\gamma$ f dari P_7

Selanjutnya jika dimisalkan bahwa $n = 2k \geq 2$ adalah genap. Pelabelan $-\gamma$ g pada P_n didefinisikan sebagai berikut :

(4.4)

Dari persamaan (4.4) dapat ditunjukkan bahwa *k edge* dari P_n diberi label *k* dan sisanya *k -1 edge* diberi label *k +1* sehingga

$$val(f) = k.\ k + (k - 1)(k + 1)$$

$$
\begin{aligned}
&= k^2 + (k^2 - 1) \\
&= 2k^2 - 1 \\
&= 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1 \\
&= \frac{n^2}{2} - 1 \\
&= \frac{n^2 - 2}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Sebagai contoh diberikan n = 8, maka $\text{pelabelan} - \gamma$ pada P_8 adalah sebagai berikut

$g\,(v_1) = 4$

$g\,(v_2) = 0$

$g\,(v_3) = 5$

$g\,(v_4) = 1$

$g\,(v_5) = 6$

$g\,(v_6) = 2$

$g\,(v_7) = 7$

$g\,(v_8) = 3.$

Sebagai ilustrasi $\text{pelabelan} - \gamma$ g dari P_8 ditunjukkan pada Gambar 4.2.

g : 4   0   5   1   6   2   7   3

4   5   4   5   4   5   4

$val\,(g\,) = 31$

Gambar 4.2 Salah Satu $\text{Pelabelan} - \gamma$ pada P_8

Berdasarkan persamaan (4.3) dan persamaan (4.5) dapat diturunkan Proposisi 4.2.2

$$g'(v_i) = \begin{cases} g(v_i) \\ g(v_{t+2}) \\ g(v_{t+1}) \end{cases}$$

Proposisi 4.2.2

Untuk setiap bilangan bulat n $\geq$ 2, berlaku

$$val_{max}(P_n) \geq \left\lfloor \frac{n^2-2}{2} \right\rfloor. \qquad \square$$

Nilai dari $val_{max}(P_n)$ pada semua $n \geq 2$ dicari dengan cara terlebih dahulu dibangun Lemma 4.2.3.

Lemma 4.2.3

Untuk setiap n $\geq$ 3, terdapat pelabelan max - γ (γ- max labeling) f dari $P_n : v_1, v_2, \ldots, v_n$, dengan sifat bahwa untuk setiap bilangan bulat i dengan $1 \leq i \leq n-2$, berlaku barisan suku-3 (3-term sequence) $s_i(f) = \{ f(v_i), f(v_{i+1}), f(v_{i+2}) \}$ tidak monoton.

Bukti

Terdapat pelabelan max $-\gamma$ f dari P_n, misalkan

$$S(f) = \{ s_1(f), s_2(f), \ldots, s_{n-2}(f)\}.$$

Asumsikan bahwa lemma salah. Sebagai akibatnya, setiap pelabelan max $-\gamma$ f dari P_n memiliki beberapa anggota dari $S(f)$ yang monoton. Di antara semua pelabelan max $-\gamma$ dari P_n, misalkan g sebagai salah satunya dengan t adalah bilangan bulat terbesar yaitu $1 \leq t \leq n-2$, dengan demikian $s_t(g)$ monoton dan $s_i(g)$ tidak monoton pada $1 \leq i \leq t$. Selanjutnya akan didefinisikan pelabelan max $-\gamma$ baru g' untuk P_n dari g sebagai

, *jika* $i \neq t+1, t+2$

, *jika* $i = t+1$

, *jika* $i = t+2$.

$$val(f) = \sum_{v \in T(f)} f(v)\deg v - \sum_{v \in B(f)} f(v)\deg v.$$

$$val(f) \le \left\lfloor \frac{n^2-2}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n^2-2}{2}, & jika\ n\ genap \\ \frac{n^2-3}{2}, & jika\ n\ ganjil \end{cases}$$

Untuk setiap bilangan bulat i dengan $1 \le i \le t$ sedemikian sehingga $val(g') \ge val(g)$. Karena g adalah pelabelan $\max-\gamma$ dari P_n dengan demikian $val(g') = val(g)$ dan g' juga pelabelan $\max-\gamma$ dari P_n. Ini kontradiksi dengan definisi dari g.

$$\left[2\sum_{i=1}^{n/2-1}(n-i)+\frac{n}{2}\right]-\left[2\sum_{i=1}^{n/2-1}(i-1)+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]=\frac{n^2-2}{2}$$

□

Path P_n dapat dibentuk *partisi* dari himpunan *vertex*-nya. Jika dimisalkan himpunan *vertex* dari P_n adalah $V(P_n)$ maka terdapat dua himpunan saling bebas $T(f)$ dan $B(f)$ dengan f adalah pelabelan $-\gamma$ dari P_n. Lipschutz (1989) menyatakan bahwa jika $\{B_i\}_{i\varepsilon I}$ adalah sebuah keluarga subhimpunan yang tak kosong dari A maka $\{B_i\}_{i\varepsilon I}$ dinamakan sebuah *partisi* dari A jika

P_1: $\cup_{i\varepsilon I} B_i$ = A

P_2: Untuk sebarang B_i, maka $B_i = B_j$ atau $B_i \cap B_j = \phi$.

Proposisi 4.2.4

Untuk setiap bilangan bulat n ≥ 2 dan setiap pelabelan $\max-\gamma$ f *dari* P_n*, berlaku*

Bukti

Sebuah pelabelan $\max-\gamma$ f dengan sifat yang telah diperkenalkan dalam Lemma 4.1.3 menyebabkan *partisi* dari $V(P_n)$ dengan dua himpunan saling bebas, $T(f)$ dan $B(f)$, sedemikian sehingga untuk setiap *edge uv* yang menghubungkan *vertex u* ∈ $T(f)$ dengan *vertex v* ∈ $B(f)$, maka $f(u) > f(v)$ sehingga

(4.6)

Karena sisi kanan dari persamaan (4.4) tidak lebih besar dari pada jumlah yang ditunjukkan oleh nilai

$$\left[2\sum_{i=1}^{(n-3)/2}(n-i)+\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}\right]-\left[2\sum_{i=1}^{(n-1)/2}(i-1)\right]=\frac{n^2-3}{2}$$

terbesar yang mungkin dari *vertex-vertex* pada *T(f)* dan nilai terkecil yang mungkin dari *vertex-vertex* pada *B(f)*, maka batas *val(f)* dapat ditunjukkan sebagai

, jika n genap (4.7)

$$val_{\max}(P_n)=\left\lfloor\frac{n^2-2}{2}\right\rfloor$$, jika n ganjil. (4.8)

Jika persamaan (4.7) dan persamaan (4.8) digabungkan maka akan menghasilkan proposisi 4.2.4.

□

Proposisi 4.2.2 dan proposisi 4.2.4 menghasilkan Teorema 4.2.5.

Teorema 4.2.5

Untuk setiap bilangan bulat n ≥ 2, berlaku

□

4.3 Pelabelan $-\gamma$ pada *Cycle*

Bagian ini membahas val_{min} dan val_{max} pada *cycle. Cycle* dengan order n didefinisikan sebagai $C_n : v_1, v_2, ..., v_n, v_1$. Nilai dari val_{min} dan val_{max} dicari pada *cycle* ganjil dan *cycle* genap.

4.3.1 Mencari $val_{min}(C_n)$

Akan dicari formula $val_{min}(C_n)$ untuk semua $n \geq 3$.

Teorema 4.3.1

Untuk setiap bilangan bulat n ≥ 3, berlaku

$val_{min}(C_n) = 2(n - 1).$

Bukti

Ambil C_n : $v_1, v_2, ..., v_n, v_1$. Misalkan $\text{pelabelan} - \gamma$ h dari C_n didefinisikan sebagai $h(v_i) = i - 1$untuk $1 \leq i \leq n$. Dengan demikian

$$val(h) = \sum_{i=1}^{n-1} |\ h(v_{i+1}) - h(v_i)\ | + |\ h(v_1) - h(v_n)\ |$$

$$= (n - 1).1 + (n - 1) = 2(n - 1).$$

Oleh karena itu val_{min} $(C_n) \leq 2(n - 1)$. Selanjutnya tinggal ditunjukkan $val_{min}(C_n) \geq 2(n - 1)$. Dengan kesimpulan 4.1.3, akan diasumsikan bahwa C_n diberi label dengan elemen-elemen pada himpunan { 0, 1, ..., $n - 1$ }. Jika diasumsikan bahwa $f(v_i) = 0$, maka ditunjukkan bahwa $f(v_t) = n - 1$, dengan $2 \leq t \leq n$. *Cycle* C_n memuat dua *edge* yang terhubung $v_1 - v_t$ yang membentuk *path*, dinamakan

$P : v_1, v_2, ..., v_t$ *dan* $P' : v_1, v_n, v_{n-1}, ..., vt.$

Misalkan *fp* sebagai pembatasan (*restriction*) dari *f* pada *P* dan *fp*' sebagai pembatasan dari *f* pada *P*'. Oleh karena itu *fp* dan *fp*' adalah $\text{pelabelan} - \gamma$ dari *P* dan *P'*, berturut-turut sehingga

$$val(f) = val(fp) + val(fp'). \tag{4.9}$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $val(fp) \geq n - 1$ dan $val(fp') \geq n - 1$.

Caranya adalah dengan mempertimbangkan *path P*. Jika $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_t)$ adalah barisan bilangan naik, maka

$$val(fp) = \sum_{i=1}^{t-1} [f(v_{i+1}) - f(v_i)] = f(v_t) - f(v_1) = n - 1$$

Jika $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_t)$ tidak naik, maka barisan ini dapat dibagi menjadi subbarisan bilangan ganjil yang bisa saja naik ataupun turun. Oleh karena itu terdapat bilangan bulat ganjil $s \geq 3$ sedemikian sehingga

$\text{I} = i_0 < i_1 < ... < i_s = t$

dan

$f(v_1), f(v_2), ..., f(v_{i_1})$ naik,

$f(v_{i_1}), f(v_{i_{i+1}}),..., f(v_{i_2})$ turun, selanjutnya untuk

$f(v_{i_{s-1}}), f(v_{i_{s-1}+1}),..., f(v_{i_s})$ naik.

Maka

$$\begin{aligned} val(fp) &= [f(v_{i_1}) - f(v_{i_0})] + [f(v_{i_1}) - f(v_{i_2})] + [f(v_{i_3}) - f(v_{i_2})] + \\ &\quad ... + [f(v_{i_s}) - f(v_{i_{s-1}})] \\ &= [f(v_t) - f(v_1)] + 2\{[f(v_{i_1}) - f(v_{i_2})] + [f(v_{i_3}) - f(v_{i_4})] + \\ &\quad ... + [f(v_{i_{s-2}}) - f(v_{i_{s-1}})] \\ &\geq (n-1) + (s-1) > n-1 \end{aligned}$$

Dengan demikian maka $val(f_p) \geq n - 1$. Dengan cara yang sama didapatkan $val(f_p') \geq (n - 1)$. Sehingga dari persamaan (4.7) dapat diturunkan bahwa $val(f) \geq 2(n - 1)$. Oleh karena itu dapat diturunkan bahwa $val_{min}(C_n) = 2(n - 1)$.

□

Karena setiap pelabelan *edge* yang dihasilkan dari $\text{pelabelan} - \gamma$ pada suatu graf yang memuat sebuah *vertex* *v* dengan *deg* *v* ≥ 3 menunjuk label 2 atau lebih pada satu *edge* terkecil yang berhubungan dengan *v*, dapat diturunkan akibat dari Teorema 4.1.1

Akibat 4.3.2

Jika G adalah graf terhubung dengan order n dan size m, maka

$$val_{min}(G) = m \text{ jika dan hanya jika } G \cong P_n$$

4.3.2 Mencari $val_{max}(C_n)$

Proposisi 4.3.3

Jika G graf terhubung r-regular bipartite dengan order n dan size m, dengan r ≥ 2, maka

$$val_{max}(G) = \frac{rn\,(\,2m-n+2\,)}{4}$$

Bukti

Ambil $n = 2k$, $V_1 = \{\ u_1, u_2, \ldots, u_k\ \}$ dan $V_2 = \{\ v_1, v_2, \ldots, v_k\ \}$ bagian dari himpunan G. Pelabelan $-\gamma$ g dari G didefinisikan sebagai :

$g(u_i) = i - 1$ dan $g(v_i) = m - (\ i - 1\ )$, untuk $1 \leq i \leq k$

Karena $m = rk \geq 2k$, dapat diturunkan bahwa $g(u) < g(v)$ jika $u \in V_1$ dan $v \in V_2$. Maka

$$\begin{aligned}
val(g) &= r\left[\sum_{i=1}^{k} g(v_i) - \sum_{i=1}^{k} g(u_i)\right] \\
&= r\{[m + m(m-1) + \ldots + (m-k+1)] \\
&\quad -[1+2+\ldots+(k-1)] \\
&= r\left\{\left[mk - \binom{k}{2}\right] - \binom{k}{2}\right\} = r\,[mk - k(k-1)] \\
&= \frac{rn(2m-n+2)}{4}
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $val_{max}(G) \geq val(g) = \dfrac{rn(2m-n+2)}{4}$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $val_{max}(G) \leq \dfrac{rn(2m-n+2)}{4}$. Misalkan f adalah pelabelan max - γ dari G. Jika dimisalkan $E(G) = \{\ e_1, e_2, \ldots, e_m\ \}$, dengan $e_i = x_i\, y_i$ dan $f(x_i) < f(y_i)$ untuk $1 \leq i \leq m$, maka

$$val(f) = \sum_{i=1}^{m} [f(y_i) - f(x_i)] = \sum_{i=1}^{m} f(y_i) - \sum_{i=1}^{m} f(x_i). \qquad (4.10)$$

Ambil $X = \{ x_i : 1 \le i \le m \}$ dan $Y = \{ y_i : 1 \le i \le m \}$, sehingga $|X| = |Y| = m = rk$. Karena r *vertex* terbesar dari X dapat diberi label dengan label 0, 1, …, $k - 1$ dan r *vertex* terbesar dari Y dapat diberi label $m, m - 1, \ldots, m - (k - 1)$, sehingga dapat diturunkan

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} f(x_i) &\ge r[1+2\ldots+(k-1)] = r\binom{k}{2}\\ \sum_{i=1}^{m} f(y_i) &\le r[m+(m-1)+\ldots+(m-k+1)\\ &= r\left[mk-\binom{k}{2}\right].\end{aligned}$$

Dari persamaan (4.8) dapat diturunkan bahwa

$$val(f) \le r\left[mk-\binom{k}{2}\right]-r\binom{k}{2}=\frac{rn(2m-n+2)}{4}.$$

Oleh karena itu, $val_{max}(G) = val(f) \le \frac{rn(2m-n+2)}{4}$. □

Dari uraian di atas dapat diturunkan Akibat 4.3.4.

Akibat 4.3.4

Untuk setiap bilangan bulat genap $n \ge 4$,

$$val_{max}(C_n) = \frac{n(n+2)}{2}.$$

Selanjutnya akan dideskripsikan $val_{max}(C_n)$ dengan n ganjil. Pelabelan $-\gamma^+$ pada graf terhubung G dengan *order* n dan *size* m adalah fungsi satu-satu $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, \ldots, m+1\}$, sehingga pelabelan $\max-\gamma^+$ menghasilkan $val^+_{\max}(G)$ yang didefinisikan sebagai $val^+_{\max}(G) = max\{val(f) : f$ adalah Pelabelan $-\gamma^+$ pada graf $G\}$.

Lemma 4.3.5

Untuk setiap bilangan bulat $k \ge 2$, berlaku

$$val_{max}(C_{2k+1}) = val^{+}_{\max}(C_{2k}).$$

Bukti

Misalkan f sebagai $\text{pelabelan max - }\gamma^{+}$ dari C_{2k}. Maka terdapat dua bilangan $a,b \in \{0, 1, 2, \ldots, m+1\}$ dengan ditunjukkan bahwa tidak ada *vertex* pada C_{2k} dari f. Sebagai akibatnya f dapat menjadi $\text{pelabelan - }\gamma$ h pada C_{2k+1}, dapat diamati bahwa C_{2k+1} sebagai subdivisi dari C_{2k}, selanjutnya dapat ditunjuk bilangan a,b pada vertex unik di $V(C_{2k+1}) - V(C_{2k})$. Dari pertidaksamaan segitiga nilai dari h kurang dari atau sama dengan f. Dengan demikian $val_{max}(C_{2k+1}) \geq val^{+}_{\max}(C_{2k})$.

Selanjutnya dibuktikan pertidaksamaan kebalikannya. Misalkan g adalah $\text{pelabelan max - }\gamma$ dari C_{2k+1}, dapat disusun graf berarah D dari C_{2k+1} dengan ditunjuk uv dengan arah (u,v) jika $g(v) > g(u)$. Sehingga D memuat *Path x, y, z* dengan *order* 3. Jika *vertex y* dihapus dari (C_{2k+1}) dan menghubungkan *vertex x* dan *z,* sehingga dihasilkan graf *G isomorfis* dengan C_{2k} dan pembatasan g' dari g pada $V(C_{2k+1}) - \{y\}$ memiliki nilai yang sama pada G dengan g pada C_{2k+1}. □

Fungsi g' adalah $\text{pelabelan} - \gamma^{+}$ pada C_{2k}, sehingga dapat dihasilkan Teorema 4.3.6.

Teorema 4.3.6

Untuk setiap bilangan bulat ganjil $n \geq 3$,

$$val_{max}(C_n) = \frac{(n-1)(n+3)}{2}$$

Bukti

Hasil diabaikan untuk $n = 3$, selanjutnya diasumsikan bahwa $n = 2k + 1 \geq 5$. Dari Lemma 4.3.5, cukup ditunjukkan bahwa $val^{+}_{\max}(C_{n-1}) = (n-1)(n+3)/2$. C_{n-1} didefinisikan sebagai $C_{n-1}: x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k, x_1$. Pelabelan $-\gamma^{+}$ dari C_{n-1} didefinisikan sebagai berikut :

$$f(x_i) = i - 1 \text{ dan } f(y_i) = 2k - i + 2 \text{, untuk } 1 \leq i \leq k.$$

Sehingga $val(f) = (n-1)(n+3)/2$ sedemikian sehingga $val^{+}_{\max}(C_{n-1}) \geq (n-1)(n+3)/2$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $val^{+}_{\max} \leq (n-1)(n+3)/2$. Misalkan g adalah pelabelan $\max - \gamma^{+}$ dari C_{n-1}, dengan $E(C_{n-1}) = \{ e_1, e_2, \ldots, e_{n-1} \}$. Sehingga terdapat bilangan bulat i dengan $1 \leq i \leq n-1$, misalkan $e_i = u_i v_i$, dengan $g(u_i) < g(v_i)$. Sehingga $val(g) = \sum_{i=1}^{n-1} g(v_i) - \sum_{i=1}^{n-1} g(u_i)$. Karena dua *vertex* terbesar di $\{ u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \}$ dapat ditunjukkan dengan label $0, 1, \ldots, k-1$ dan dua *vertex* terbesar di $\{ v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \}$ dapat ditunjukkan dengan label $k+2, k+3, \ldots, 2k+1$, sehingga dapat ditulis sebagai

$$\sum_{i=1}^{n-1} g(u_i) \geq k^2 - k \text{ dan } \sum_{i=1}^{n-1} g(v_i) \leq 3k^2 + 3k$$

sehingga $val(g) \leq (3k^2 + 3k) - (k^2 - k) = (n-1)(n+3)/2$. $\square$

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasar uraian pada pembahasan, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut

3. $\text{pelabelan} - \gamma$ pada *path* menghasilkan val_{min} (P_n) = *n-1,* val_{max} (P_n) = $\left\lfloor \frac{n^2-2}{2} \right\rfloor$, untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$
4. $\text{pelabelan} - \gamma$ pada *cycle* menghasilkan $val_{min}(C_n) = 2(n - 1)$, untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$. $\text{Pelabelan} - \gamma$ C_n dengan bilangan bulat ganjil $n \geq 3$ menghasilkan $val_{max}(C_n) = \frac{(n-1)(n+3)}{2}$, sedangkan $\text{pelabelan} - \gamma$ C_n dengan bilangan bulat genap $n \geq 4$ menghasilkan $val_{max}(C_n) = \frac{n(n+2)}{2}$.

5.2. Saran

$\text{Pelabelan} - \gamma$ yang dibahas dalam penulisan ini adalah $\text{pelabelan} - \gamma$ pada *path* dan *cycle,* disarankan agar $\text{pelabelan} - \gamma$ juga bisa dikerjakan pada graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Aldous, J. M. and R. J. Wilson (2007) *Graphs and Applications : An Introductory Approuch.* Springer. Great Britain.

Bondy, J. A. and U.S.R. Murty (1976). *Graph Theory with Applications*. Elsevier Science Publishing Company Inc. New York.

Chartrand, G ., D. Erwin, D.W. VanderJaght and P. Zhang (2005) γ *–labeling of Graphs.* Bulletin of the ICA.,vol. 44, pp : 51-68

Chartrand, G and O.R Ollermann (1993). *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Mc Graw-Hill. USA.

Harsfield, N and G. Ringel (1990). *Pearls and Graph Theory : A Comprehensive Introduction.* Academic Press, Inc. Sandiego.

Johnsonbaugh, R. (2001). *Discrete Mathematics*. 5th edition. Prentice Hall. New Jersey.

Lipschutz, S. (1989). *Teori Himpunan (Set Theory).* Erlangga. Jakarta

Wallis, W.D. (2001). *Magic Graphs.* Birkhauser. Boston

Wijaya, K. (2004), *Pelabelan Konsekutif pada Graf Sikel dan Graf Bipartite Komplit*, Jurnal Ilmu Dasar Vol. 5 No 1;1-7

LAMPIRAN

Lampiran1: Listing Program $\text{Pelabelan} - \gamma$ pada *Path*

```
program path;
uses crt;
label 77;
var
  n,m,Vmn,Vmx : integer;
  lagi      : char;

begin
clrscr;
77 : writeln;
   gotoxy(20,8);writeln('<<< PROGRAM PELABELAN-GAMMA PADA  PATH Pn>>>');
   gotoxy(20,16);writeln(‘TEKAN ENTER’);
   gotoxy(20,13);write('MASUKKAN ORDER DARI PATH n : ');readln(n);
   writeln;
   m:= (n MOD 2);
   if (n =0) or (n=1) then
   begin
      gotoxy(20,23);writeln('TAK ADA PATH YANG TERBENTUK');
    end

   else


   begin
   if m=0 then(* n genap*)
   begin
      Vmn :=n-1;
      Vmx :=((n*n)-2) div 2;
      gotoxy(20,23);writeln('Nilai Valmin Pn adalah : ',Vmn:3);
```

```
        gotoxy(20,25);writeln('Nilai Valmax Pn adalah : ',Vmx:3);
    end

    else

    begin(* n ganjil*)
        Vmn:=n-1;
        Vmx:=((n*n)-3) div 2;
        gotoxy(20,23);writeln('Nilai Valmin Pn : ',Vmn:3);
        gotoxy(20,25);writeln('Nilai Valmax Pn : ',Vmx:3);
    end
    end;
       writeln;
       gotoxy(20,39);writeln('LALU TEKAN ENTER');
       gotoxy(20,36);write('MAU MENGHITUNG LAGI ?(Y/T)  ');readln(lagi);clrscr;
    if (lagi='Y') or (lagi='y') then goto 77;
end.
```

Lampiran2: Listing Program $\text{Pelabelan} - \gamma$ pada *Cycle*

```
program cycle;
uses crt;
label 77;
var
  n,m          : integer;
  Vmn,Vmx      : real;
  lagi         : char;

begin
clrscr;
77 : writeln;
    gotoxy(20,8);writeln('<<< PROGRAM PELABELAN-GAMMA PADA CYCLE Cn >>>');
```

```
gotoxy(20,16);writeln(‘TEKAN ENTER’);
 gotoxy(20,13);write('MASUKKAN ORDER DARI CYCLE n : ');readln(n);
 writeln;
 m:= (n MOD 2);
 if (n =0) or (n=1) or (n=2) then
 begin
     gotoxy(20,23);writeln('TAK ADA CYCLE YANG TERBENTUK');
 end

 else



begin
 if m=0 then(* n genap*)
 begin
     Vmn :=2*(n-1);
     Vmx :=(n)*(n+1)*0.5;
     gotoxy(20,23);writeln('Nilai Valmin Cn : ',Vmn:1:0);
     gotoxy(20,25);writeln('Nilai Valmax Cn : ',Vmx:1:0);
 end

 else

 begin(* n ganjil*)
     Vmn:=2*(n-1);
     Vmx:=(n-1)*(n+3)*0.5;
     gotoxy(20,23);writeln('Nilai Valmin Cn : ',Vmn:1:0);
     gotoxy(20,25);writeln('Nilai Valmax Cn : ',Vmx:1:0);
 end
 end;
    writeln;
```

```
        gotoxy(20,39);writeln('LALU TEKAN ENTER');
        gotoxy(20,36);write('MAU MENGHITUNG LAGI ? (Y/T) ');readln(lagi);clrscr;
    if (lagi='Y') or (lagi='y') then goto 77;
end;
end.
```